Apectos avanzados de la Inteligencia Artificial.Extensiones de los conjuntos difusos en la representación del conocimiento

Humberto Bustince

Universidad Pública de Navarra
Pamplona, Spain

Índice

1. Conjuntos difusos
2. Origen de las extensiones
3. Cinco extensiones de los conjuntos difusos. Definición y evolución
4. Cuándo debemos utilizar extensiones
5. Construcción
6. Dos aplicaciones
7. Conclusiones

Orígenes

1. Lógica clásica
   - Verdad/falsedad. Álgebra de Boole. Principio de no contradicción y principio de tercio excluso
2. Lógica triádica de Pierce
3. Lógica **intuicionista** de Brouwer (1907)
   - Constructibilidad:
     - Los objetos son intuiciones mentales
     - Las propiedades de los objetos son las propiedades propuestas en su construcción
   - Cálculo proposicional intuicionista. Álgebras de Heyting (1930)
   - No se cumple el principio de tercio excluso ni la doble negación
   - 1984: nuevos conjuntos
4. Lógicas multivaluadas. J. Łukasiewicz (1878-1956)
   - MV-álgebras. No vale el principio de tercio excluso

Orígenes

1. Lógica clásica
   - Verdad/falsedad. Álgebra de Boole. Principio de no contradicción y principio de tercio excluso
2. Lógica triádica de Pierce
3. Lógica **intuicionista** de Brouwer (1907)
   - Constructibilidad:
     - Los objetos son intuiciones mentales
     - Las propiedades de los objetos son las propiedades propuestas en su construcción
   - Cálculo proposicional intuicionista. Álgebras de Heyting (1930)
   - No se cumple el principio de tercio excluso ni la doble negación
   - 1984: nuevos conjuntos
4. Lógicas multivaluadas. J. Łukasiewicz (1878-1956)
   - MV-álgebras. No vale el principio de tercio excluso

Orígenes

1. Lógica clásica
   - Verdad/falsedad. Álgebra de Boole. Principio de no contradicción y principio de tercio excluso
2. Lógica triádica de Pierce
3. Lógica **intuicionista** de Brouwer (1907)
   - Constructibilidad:
     - Los objetos son intuiciones mentales
     - Las propiedades de los objetos son las propiedades propuestas en su construcción
   - Cálculo proposicional intuicionista. Álgebras de Heyting (1930)
   - No se cumple el principio de tercio excluso ni la doble negación
   - 1984: nuevos conjuntos
4. Lógicas multivaluadas. J. Łukasiewicz (1878-1956)
   - MV-álgebras. No vale el principio de tercio excluso

Conjuntos difusos

L. A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and Control 8 (1965) 338-353: Un conjunto difuso es una clase con un continuo de grados de pertenencia

Definición

Un conjunto difuso A *sobre un universo de discurso* U *es un objeto de la forma:*

$$A = \{(u_i, \mu_A(u_i)) | u_i \in U\}$$

donde $\mu_A : U \longrightarrow [0, 1]$.

$\mu_A(u_i)$ representa el grado de pertenencia del elemento $u_i \in U$ al conjunto A.

Conjuntos difusos

$$FS(U) \equiv [0,1]^U \qquad\qquad \mu_A(u_i) \equiv A(u_i)$$

$$A \cup B(u_i) = \text{máx}(A(u_i), B(u_i))$$
$$A \cap B(u_i) = \text{mín}(A(u_i), B(u_i))$$

$(FS(U), \cup, \cap)$ es un retículo completo

$A \leq_{FS} B$ si y sólo si $A(u_i) \leq B(u_i)$ para todo $u_i \in U$

- R.C. Willmott, Mean measures in fuzzy power-set theory, Report No. FRP-6, Department of Mathematics, Universit,j of Essex, Colchester, CO4 3SQ, England (1979)
- W. Bandler, L. Kohout, Fuzzy power sets, fuzzy implication operators, Fuzzy Sets and Systems 4 (1980) 1330

Conjuntos L-difusos

- J. Goguen, L-fuzzy sets, J. Math. Anal. Appl. 18 (1967) 145-174

Definición

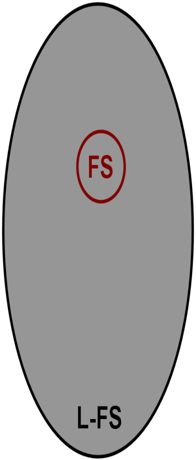
Sea $(L, \vee, \wedge)$ *un retículo completo. Un conjunto* L*-difuso sobre el referencial* U *es una aplicación*

$$A : U \to L$$

$$A \cup B(u_i) = \vee(A(u_i), B(u_i))$$
$$A \cap B(u_i) = \wedge(A(u_i), B(u_i))$$

$(L\text{-}FS(U), \cup, \cap)$ es un retículo completo

Conjuntos L-difusos



- J. Goguen, L-fuzzy sets, J. Math. Anal. Appl. 18 (1967) 145-174

Definición

Sea $(L, \vee, \wedge)$ *un retículo completo. Un conjunto* L*-difuso sobre el referencial* U *es una aplicación*

$$A : U \to L$$

$$A \cup B(u_i) = \vee(A(u_i), B(u_i))$$
$$A \cap B(u_i) = \wedge(A(u_i), B(u_i))$$

$(L\text{-}FS(U), \cup, \cap)$ es un retículo completo

Origen de las extensiones

El 11 de diciembre de 2008 L. A. Zadeh dice:

La **lógica difusa** es un sistema preciso de razonamiento, deducción y computación en el que los objetos de discurso y análisis están asociados a información que es, o puede ser, imperfecta

La **información imperfecta** se define como aquella información que en uno o más sentidos es imprecisa, incierta, vaga, incompleta, parcialmente verdadera o parcialmente posible

Origen de las extensiones

El 11 de diciembre de 2008 L. A. Zadeh dice:

La **lógica difusa** es un sistema preciso de razonamiento, deducción y computación en el que los objetos de discurso y análisis están asociados a información que es, o puede ser, imperfecta

La **información imperfecta** se define como aquella información que en uno o más sentidos es imprecisa, incierta, vaga, incompleta, parcialmente verdadera o parcialmente posible

Origen de las extensiones

1. En la lógica difusa todo es, o puede ser, una cuestión de grado. **Dichos grados pueden ser difusos**

2. La lógica difusa no es un sustituto de la lógica bivalorada o de la teoría de la probabilidad basada en la lógica bivalorada. La lógica difusa incorpora a la lógica bivalorada y a la teoría de la probabilidad basada en la lógica bivalorada un amplio espectro de conceptos y técnicas para el tratamiento de la información imperfecta

3. La lógica difusa pretende tratar problemas de razonamiento, deducción y computación con información imperfecta que están más allá del alcance de los métodos tradicionales basados en la lógica bivalorada y en la teoría de la probabilidad basada en la lógica bivalorada

Origen de las extensiones

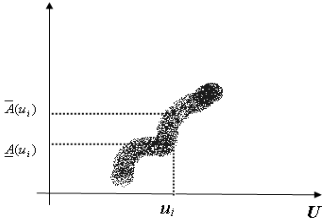
1. En la lógica difusa todo es, o puede ser, una cuestión de grado. **Dichos grados pueden ser difusos**

2. La lógica difusa no es un sustituto de la lógica bivalorada o de la teoría de la probabilidad basada en la lógica bivalorada. La lógica difusa incorpora a la lógica bivalorada y a la teoría de la probabilidad basada en la lógica bivalorada un amplio espectro de conceptos y técnicas para el tratamiento de la información imperfecta

3. La lógica difusa pretende tratar problemas de razonamiento, deducción y computación con información imperfecta que están más allá del alcance de los métodos tradicionales basados en la lógica bivalorada y en la teoría de la probabilidad basada en la lógica bivalorada

Origen de las extensiones

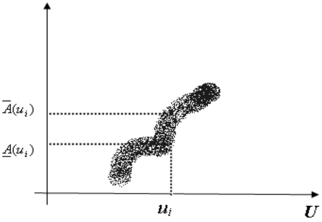
4 En la lógica difusa el instrumento de escritura es un aerosol de pintura con un **patrón de rociado perfectamente conocido y ajustable**. En la lógica bivalorada el instrumento de escritura es un bolígrafo



5 La importancia de la lógica difusa deriva del hecho de que en la mayor parte de las ocasiones, en el mundo real la información imperfecta es la norma más que la excepción

Origen de las extensiones

4 En la lógica difusa el instrumento de escritura es un aerosol de pintura con un **patrón de rociado perfectamente conocido y ajustable**. En la lógica bivalorada el instrumento de escritura es un bolígrafo



5 La importancia de la lógica difusa deriva del hecho de que en la mayor parte de las ocasiones, en el mundo real la información imperfecta es la norma más que la excepción

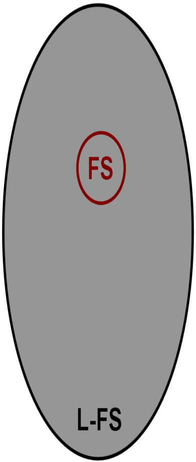
Origen de las extensiones

1. Los conjuntos difusos surgen para tratar problemas cuyos objetos de discurso están asociados a información imperfecta
2. Existen situaciones donde el experto no posee toda la información necesaria para construir los grados de pertenencia ideales

El origen de las extensiones está en el intento de representar simultáneamente ambos niveles de información imperfecta

- E.E. Kerre, A first view on the alternatives of fuzzy sets theory, in : B. Reusch, K-H Temme (Eds), Computational intelligence in Theory and Practice, Physica-Verlag, Heidelberg (2001) 55-72

Conjuntos difusos tipo 2

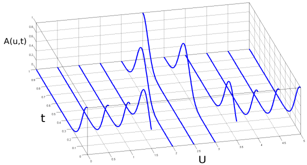


- L. A. Zadeh, Quantitative fuzzy semantics, Inform. Sci. 3 (1971) 159-176

Definición

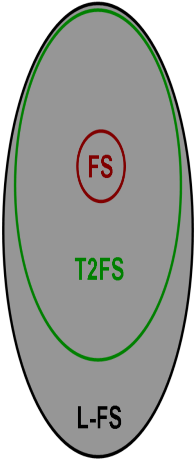
Un conjunto difuso de tipo 2 es una aplicación:

$$A : U \to FS([0,1])$$



- Los conjuntos difusos tipo 2 son un caso particular de los conjuntos L-difusos
- $T2FS(U) \equiv (FS([0,1]))^U$

Conjuntos difusos tipo 2

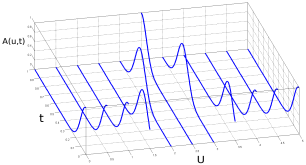


- L. A. Zadeh, Quantitative fuzzy semantics, Inform. Sci. 3 (1971) 159-176

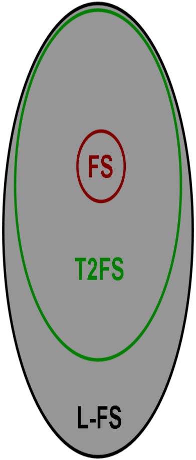
Definición

Un conjunto difuso de tipo 2 es una aplicación:

$$A : U \to FS([0,1])$$



- Los conjuntos difusos tipo 2 son un caso particular de los conjuntos L-difusos
- $T2FS(U) \equiv (FS([0,1]))^U$

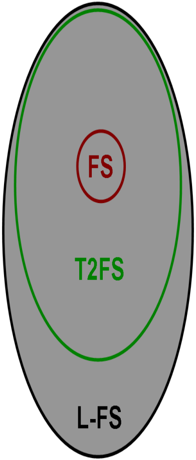


Problemas:

1. Notación
   - M. Mizumoto, K. Tanaka, Some properties of fuzzy sets of type 2, Inform. Control, 31, (1976), 312-340
   - J.M. Mendel, R. John, Type-2 Fuzzy Sets Made Simple, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 10(2) (2002) 117-127

$$\int_{u\in U}\int_{t\in J_u} A(u,t)/(u,t) \qquad J_u \subset [0,1]$$

donde J_u es la pertenencia primaria de $u \in U$ y, para cada valor fijo $u = u_0$, el conjunto difuso $\int_{t\in J_{u_0}} A(u_0,t)/t$ es la pertenencia secundaria de u_0.



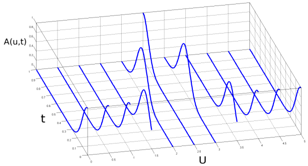
Definición

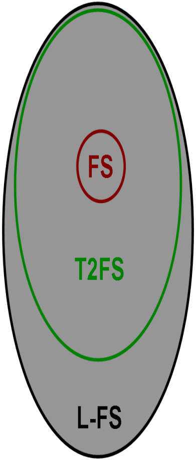
Sea $A : U \to FS([0,1])$ *un conjunto difuso tipo 2. Entonces* A *se denota como*

$$\{(u_i, A(u_i,t)) \mid u_i \in U \ , \ t \in [0,1]\} \ .$$

donde $A(u_i,\cdot) : [0,1] \to [0,1]$ *se define como*

$$A(u_i,t) = A(u_i)(t)$$





2 Estructura

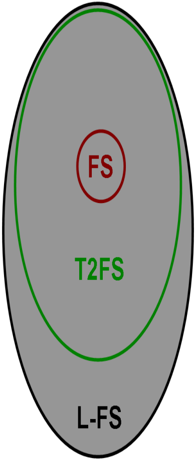
- M. Mizumoto, K. Tanaka, Some properties of fuzzy sets of type 2, Inform. Control, 31, (1976), 312-340
- D. Dubois, H. Prade, Operations in a fuzzy-valued logic, Inform. Control, 43(2), (1979) 224-254

Definición

$$A \cup_{T2} B(u_i) = A(u_i) \cup B(u_i)$$
$$A \cap_{T2} B(u_i) = A(u_i) \cap B(u_i)$$

Proposición

$(T2FS(U), \cup_{T2}, \cap_{T2})$ es un retículo acotado con respecto al orden:
$A \leq_{T2FS(U)} B$ si y sólo si $A \cup_{T2} B = B$



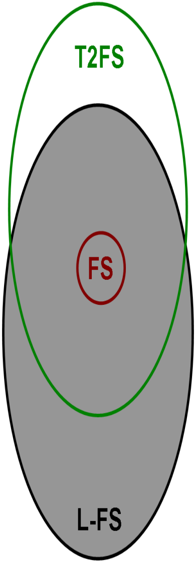
Definición

$$A = \{(u_i, A(u_i,t)) \mid u_i \in U \ , \ t \in [0,1]\}$$
$$B = \{(u_i, B(u_i,t)) \mid u_i \in U \ , \ t \in [0,1]\}$$

$$\bullet A \sqcap B = \{(u_i, A \sqcap B(u_i,t)) \mid u_i \in U \ , \ t \in [0,1]\}$$
$$A \sqcap B(u_i,t) = \sup_{\text{mín}(z,w)=t} \text{mín}(A(u_i,z), B(u_i,w))$$

$$\bullet A \sqcup B = \{(u_i, A \sqcup B(u_i,t)) \mid u_i \in U \ , \ t \in [0,1]\}$$
$$A \sqcup B(u_i,t) = \sup_{\text{máx}(z,w)=t} \text{mín}(A(u_i,z), B(u_i,w))$$

$(T2FS(U), \sqcup, \sqcap)$ **NO es un retículo**



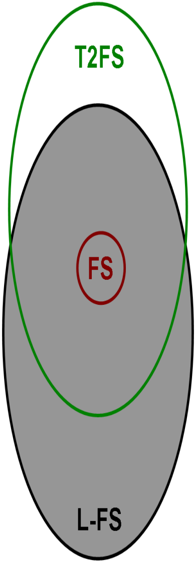
Definición

$$A = \{(u_i, A(u_i,t)) \mid u_i \in U \ , \ t \in [0,1]\}$$
$$B = \{(u_i, B(u_i,t)) \mid u_i \in U \ , \ t \in [0,1]\}$$

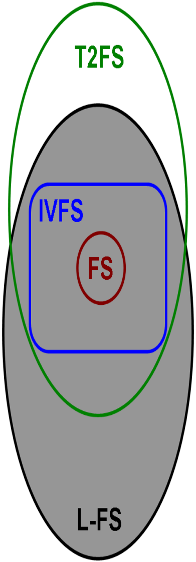
$$\bullet A \sqcap B = \{(u_i, A \sqcap B(u_i,t)) \mid u_i \in U \ , \ t \in [0,1]\}$$
$$A \sqcap B(u_i,t) = \sup_{\text{mín}(z,w)=t} \text{mín}(A(u_i,z), B(u_i,w))$$

$$\bullet A \sqcup B = \{(u_i, A \sqcup B(u_i,t)) \mid u_i \in U \ , \ t \in [0,1]\}$$
$$A \sqcup B(u_i,t) = \sup_{\text{máx}(z,w)=t} \text{mín}(A(u_i,z), B(u_i,w))$$

$(T2FS(U), \sqcup, \sqcap)$ **NO es un retículo**



3. Eficiencia computacional: regresión al infinito
4. Aplicaciones
   Todavía no existe una aplicación donde se demuestre la ventaja de utilizar estos conjuntos
   1. **Computación con palabras**:
      - J.M. Mendel Type-2 fuzzy sets for computing with words Conference Information: IEEE International Conference on Granular Computing, MAY 10-12, 2006 Atlanta, (2006) GA 8-8.
      - J.M. Mendel, Computing with words and its relationships with fuzzistics Information Sciences 177(4) (2007) 988-1006
   2. **Computación perceptual**: J.M. Mendel,
   3. **Control**:
      - H. Hagras, A Hierarchical Type-2 Fuzzy Logic Control Architecture for Autonomous Mobile Robots, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 12, (2004) 524-539.



1. En 1975 Sambuc: Φ-flou
2. Nombre de conjuntos intervalo-valorados difusos años 80 (Gorzalczany y Turksen)

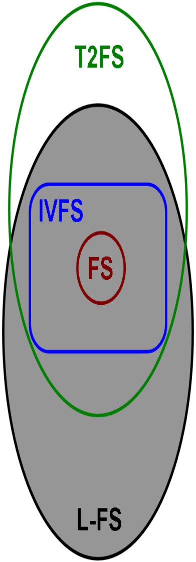
Definición

Un conjunto intervalo-valorado difuso es una aplicación:

$$A : U \to L([0,1])$$

$A(u_i) = [\underline{A}(u_i), \overline{A}(u_i)]$ denota el grado de pertenencia de u_i a A.

- Son un caso particular de los conjuntos L-difusos
- $L([0,1]) = \{\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}] | (\underline{x}, \overline{x}) \in [0,1]^2$ and $\underline{x} \leq \overline{x}\}$
- J.L. Deng, Introduction to grey system theory, Journal of Grey Systems 1 (1989) 1-24



1. En 1975 Sambuc: Φ-flou
2. Nombre de conjuntos intervalo-valorados difusos años 80 (Gorzalczany y Turksen)

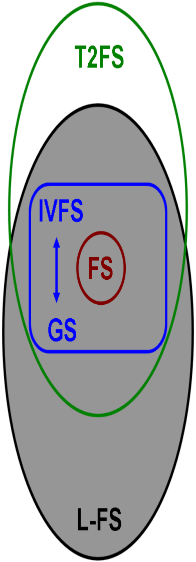
Definición

Un conjunto intervalo-valorado difuso es una aplicación:

$$A : U \to L([0,1])$$

$A(u_i) = [\underline{A}(u_i), \overline{A}(u_i)]$ denota el grado de pertenencia de u_i a A.

- Son un caso particular de los conjuntos L-difusos
- $L([0,1]) = \{\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}] | (\underline{x}, \overline{x}) \in [0,1]^2$ and $\underline{x} \leq \overline{x}\}$
- J.L. Deng, Introduction to grey system theory, Journal of Grey Systems 1 (1989) 1-24



1. En 1975 Sambuc: Φ-flou
2. Nombre de conjuntos intervalo-valorados difusos años 80 (Gorzalczany y Turksen)

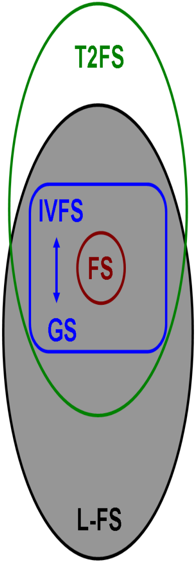
Definición

Un conjunto intervalo-valorado difuso es una aplicación:

$$A : U \to L([0,1])$$

$A(u_i) = [\underline{A}(u_i), \overline{A}(u_i)]$ denota el grado de pertenencia u_i a A.

- Son un caso particular de los conjuntos L-difusos
- $L([0,1]) = \{\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}] | (\underline{x}, \overline{x}) \in [0,1]^2$ and $\underline{x} \leq \overline{x}\}$
- J.L. Deng, Introduction to grey system theory, Journal of Grey Systems 1 (1989) 1-24

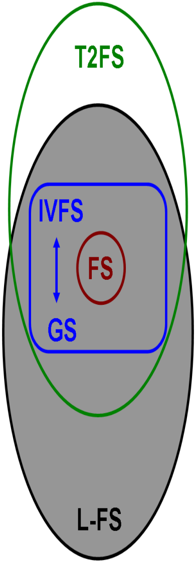


Definición

$$A \cup_{L([0,1])} B(u_i) =$$
$$[\max(\underline{A}(u_i), \underline{B}(u_i)), \max(\overline{A}(u_i), \overline{B}(u_i))]$$
$$A \cap_{L([0,1])} B(u_i) =$$
$$[\min(\underline{A}(u_i), \underline{B}(u_i)), \min(\overline{A}(u_i), \overline{B}(u_i))]$$

$(IVFS(U), \cup_{L([0,1])}, \cap_{L([0,1])})$ es un retículo completo

Dos interpretaciones de los IVFSs



A.- Interpretación matemática. Interés teórico.

Paradoja de D. Dubois:

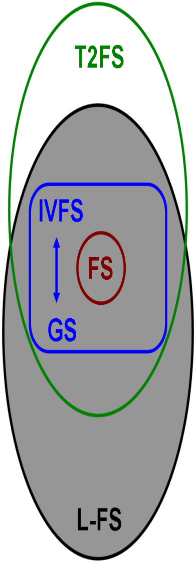
$$\min(A(u_i), 1 - A(u_i)) \leq 0{,}5$$

$$\min([\underline{A}(u_i), \overline{A}(u_i)], [1 - \overline{A}(u_i), 1 - \underline{A}(u_i)]) \leq ??$$

- H.Bustince, F.Herrera, J.Montero (Eds.), Fuzzy Sets and Their Extensions: Representation, Aggregation and Models, Springer, Berlin, 2007.

B.- El experto no conoce el valor exacto de la pertenencia del elemento al conjunto difuso. Sin embargo sabe que dicho valor está acotado por los extremos del intervalo de pertenencia al conjunto intervalo-valorado difuso.

Dos interpretaciones de los IVFSs



A.- Interpretación matemática. Interés teórico.

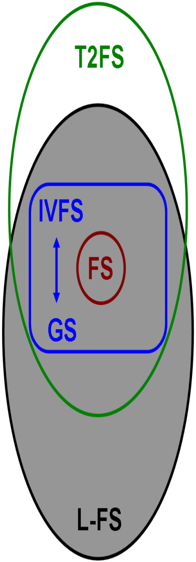
Paradoja de D. Dubois:

$$\min(A(u_i), 1 - A(u_i)) \leq 0{,}5$$
$$\min([\underline{A}(u_i), \overline{A}(u_i)], [1 - \overline{A}(u_i), 1 - \underline{A}(u_i)]) \leq ??$$

- H.Bustince, F.Herrera, J.Montero (Eds.), Fuzzy Sets and Their Extensions: Representation, Aggregation and Models, Springer, Berlin, 2007.

B.- El experto no conoce el valor exacto de la pertenencia del elemento al conjunto difuso. Sin embargo sabe que dicho valor está acotado por los extremos del intervalo de pertenencia al conjunto intervalo-valorado difuso.

Dos interpretaciones de los IVFSs



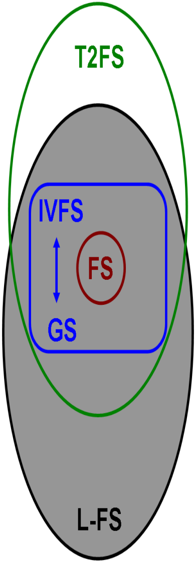
A.- Interpretación matemática. Interés teórico.

Paradoja de D. Dubois:

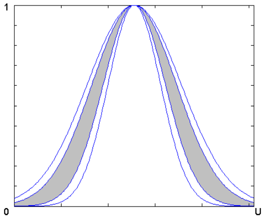
$$\min(A(u_i), 1 - A(u_i)) \leq 0{,}5$$
$$\min([\underline{A}(u_i), \overline{A}(u_i)], [1 - \overline{A}(u_i), 1 - \underline{A}(u_i)]) \leq ??$$

- H.Bustince, F.Herrera, J.Montero (Eds.), Fuzzy Sets and Their Extensions: Representation, Aggregation and Models, Springer, Berlin, 2007.

B.- El experto no conoce el valor exacto de la pertenencia del elemento al conjunto difuso. Sin embargo sabe que dicho valor está acotado por los extremos del intervalo de pertenencia al conjunto intervalo-valorado difuso.



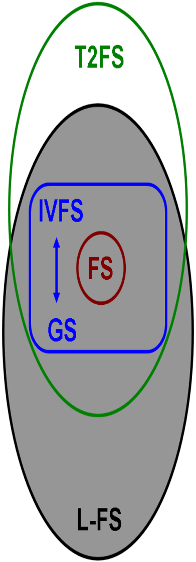
- G. Klir, B. Yuan, Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1995.



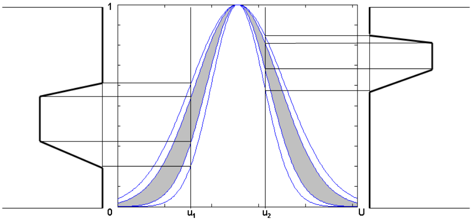
- G. Deschrijver, E.E. Kerre, On the position of intuitionistic fuzzy set theory in the framework of theories modelling imprecision, Information Sciences 177, (2007) 1860-1866
- J.M. Mendel, Advances in type-2 fuzzy sets and systems, Information Sciences 177, (2007) 84-110

Año 2000, Nombre:

conjuntos difusos de tipo 2 intervalares



- G. Klir, B. Yuan, Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1995.

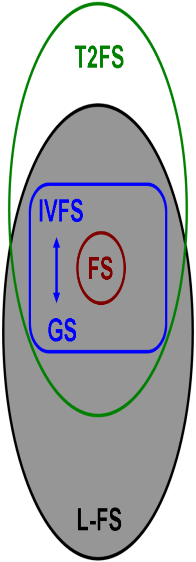


- G. Deschrijver, E.E. Kerre, On the position of intuitionistic fuzzy set theory in the framework of theories modelling imprecision, Information Sciences 177, (2007) 1860-1866
- J.M. Mendel, Advances in type-2 fuzzy sets and systems, Information Sciences 177, (2007) 84-110

Año 2000, Nombre:

conjuntos difusos de tipo 2 intervalares

Problemas de los conjuntos intervalo-valorados difusos



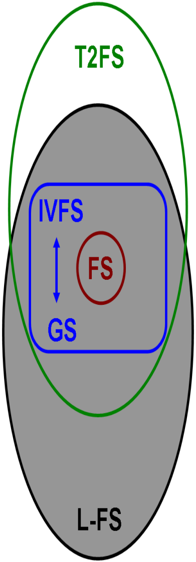
1.- Un gran número de contribuciones son copia de desarrollos para conjuntos difusos.

2.- Las aplicaciones parten de datos intervalares. Imposible comparar bondad frente a los difusos.

3.- Los resultados de las medidas numéricas de información, etc... deben ser intervalares. Ej: grado de compatibilidad de Gorzalczany.

4.- Eficiencia computacional.

5.- Dos nombres: conjuntos intervalo - valorados difusos, conjuntos difusos de tipo 2 intervalares.



1.- Un gran número de contribuciones son copia de desarrollos para conjuntos difusos.

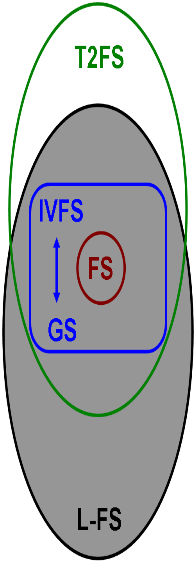
2.- Las aplicaciones parten de datos intervalares. Imposible comparar bondad frente a los difusos.

3.- Los resultados de las medidas numéricas de información, etc... deben ser intervalares. Ej: grado de compatibilidad de Gorzalczany.

4.- Eficiencia computacional.

5.- Dos nombres: conjuntos intervalo - valorados difusos, conjuntos difusos de tipo 2 intervalares.

Problemas de los conjuntos intervalo-valorados difusos



1.- Un gran número de contribuciones son copia de desarrollos para conjuntos difusos.

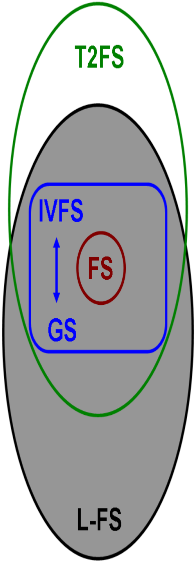
2.- Las aplicaciones parten de datos intervalares. Imposible comparar bondad frente a los difusos.

3.- Los resultados de las medidas numéricas de información, etc... deben ser intervalares. Ej: grado de compatibilidad de Gorzalczany.

4.- Eficiencia computacional.

5.- Dos nombres: conjuntos intervalo - valorados difusos, conjuntos difusos de tipo 2 intervalares.

Problemas de los conjuntos intervalo-valorados difusos



1.- Un gran número de contribuciones son copia de desarrollos para conjuntos difusos.

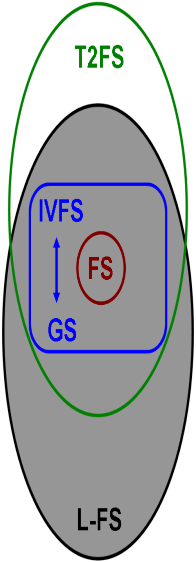
2.- Las aplicaciones parten de datos intervalares. Imposible comparar bondad frente a los difusos.

3.- Los resultados de las medidas numéricas de información, etc... deben ser intervalares. Ej: grado de compatibilidad de Gorzalczany.

4.- Eficiencia computacional.

5.- Dos nombres: conjuntos intervalo - valorados difusos, conjuntos difusos de tipo 2 intervalares.

Problemas de los conjuntos intervalo-valorados difusos



1.- Un gran número de contribuciones son copia de desarrollos para conjuntos difusos.

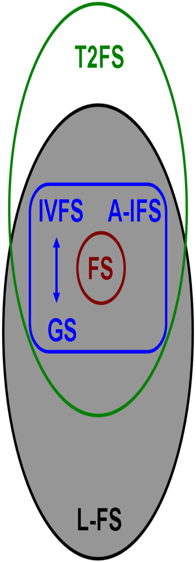
2.- Las aplicaciones parten de datos intervalares. Imposible comparar bondad frente a los difusos.

3.- Los resultados de las medidas numéricas de información, etc... deben ser intervalares. Ej: grado de compatibilidad de Gorzalczany.

4.- Eficiencia computacional.

5.- Dos nombres: conjuntos intervalo - valorados difusos, conjuntos difusos de tipo 2 intervalares.

Conjuntos intuicionistas difusos de Atanassov



- K.T. Atanassov, Intuitionistic fuzzy sets, VII ITKRs Session, Sofia (deposed in Central Science-Technical Library of Bulgarian Academy of Science, 1697/84), 1983 (in Bulgarian)
- K.T. Atanassov, Intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems 20 (1986) 87-96

Definición

Un conjunto intuicionista difuso de Atanassov sobre U *es una expresión* A *dada por*

$$A = \{(u_i, \mu_A(u_i), \nu_A(u_i)) | u_i \in U\}, \text{ donde}$$

$$\mu_A : U \longrightarrow [0,1]$$

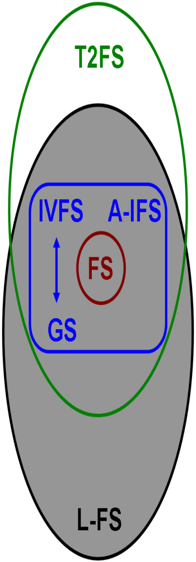
$$\nu_A : U \longrightarrow [0,1]$$

tal que $0 \leq \mu_A(u_i) + \nu_A(u_i) \leq 1$ *para todo* $u_i \in U$

Negación

$\pi_A(u_i) = 1 - \mu_A(u_i) - \nu_A(u_i)$ índice de Atanassov.

- W.L. Gau and D.J. Buehrer, Vague sets, IEEE Trans. Systems Man Cybernet. 23(2)(1993)610-614



- K.T. Atanassov, Intuitionistic fuzzy sets, VII ITKRs Session, Sofia (deposed in Central Science-Technical Library of Bulgarian Academy of Science, 1697/84), 1983 (in Bulgarian)
- K.T. Atanassov, Intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems 20 (1986) 87-96

Definición

Un conjunto intuicionista difuso de Atanassov sobre U es una expresión A dada por

$$A = \{(u_i, \mu_A(u_i), \nu_A(u_i))|u_i \in U\}, \text{ donde}$$

$$\mu_A : U \longrightarrow [0,1]$$

$$\nu_A : U \longrightarrow [0,1]$$

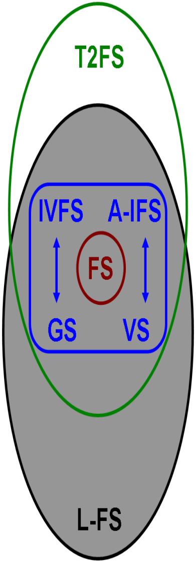
tal que $0 \leq \mu_A(u_i) + \nu_A(u_i) \leq 1$ para todo $u_i \in U$

Negación

$\pi_A(u_i) = 1 - \mu_A(u_i) - \nu_A(u_i)$ índice de Atanassov.

- W.L. Gau and D.J. Buehrer, Vague sets, IEEE Trans. Systems Man Cybernet. 23(2)(1993)610-614

Conjuntos intuicionistas difusos de Atanassov



- K.T. Atanassov, Intuitionistic fuzzy sets, VII ITKRs Session, Sofia (deposed in Central Science-Technical Library of Bulgarian Academy of Science, 1697/84), 1983 (in Bulgarian)
- K.T. Atanassov, Intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems 20 (1986) 87-96

Definición

Un conjunto intuicionista difuso de Atanassov sobre U *es una expresión* A *dada por*

$$A = \{(u_i, \mu_A(u_i), \nu_A(u_i))|u_i \in U\}, \text{ donde}$$

$$\mu_A : U \longrightarrow [0,1]$$

$$\nu_A : U \longrightarrow [0,1]$$

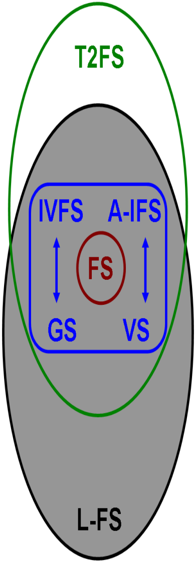
tal que $0 \leq \mu_A(u_i) + \nu_A(u_i) \leq 1$ *para todo* $u_i \in U$

Negación

$\pi_A(u_i) = 1 - \mu_A(u_i) - \nu_A(u_i)$ índice de Atanassov.

- W.L. Gau and D.J. Buehrer, Vague sets, IEEE Trans. Systems Man Cybernet. 23(2)(1993)610-614

Conjuntos intuicionistas difusos de Atanassov



- Los conjuntos intuicionistas difusos de Atanassov son un caso particular de los conjuntos L-difusos
- $\mathcal{L} = \{(x_1, x_2) | x_1 + x_2 \leq 1\}$

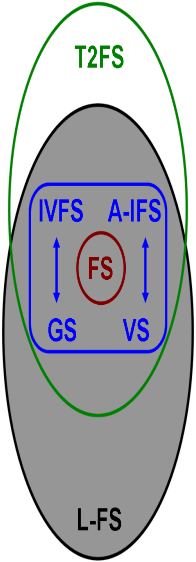
$A \cup B =$

$\{(u_i, \text{máx}(\mu_A(u_i), \mu_B(u_i)), \text{mín}(\nu_A(u_i), \nu_B(u_i))) | u_i \in U\}$

$A \cap B =$

$\{(u_i, \text{mín}(\mu_A(u_i), \mu_B(u_i)), \text{máx}(\nu_A(u_i), \nu_B(u_i))) | u_i \in U\}$

$(A - IFS(U), \cup, \cap)$ es un retículo completo



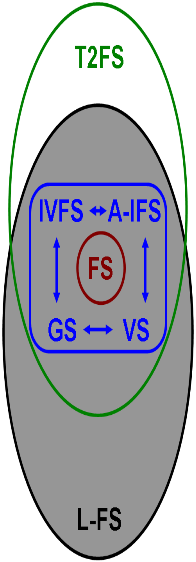
- K. Atanassov, G. Gargov, Interval valued intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 31(3), (1989) 343-349
- G. Deschrijver, E.E. Kerre, On the position of intuitionistic fuzzy set theory in the framework of theories modelling imprecision, Information Sciences 177, (2007) 1860-1866

Teorema

La aplicación

$$\Phi : IVFS(U) \to A - IFS(U)$$
$$A \to A',$$

donde $A' = \{(u_i, \underline{A}(u_i), 1 - \overline{A}(u_i))|u_i \in U\}$, *es una biyección*



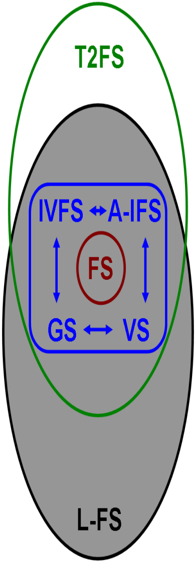
- K. Atanassov, G. Gargov, Interval valued intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 31(3), (1989) 343-349
- G. Deschrijver, E.E. Kerre, On the position of intuitionistic fuzzy set theory in the framework of theories modelling imprecision, Information Sciences 177, (2007) 1860-1866

Teorema

La aplicación

$$\Phi : IVFS(U) \to A - IFS(U)$$
$$A \to A',$$

donde $A' = \{(u_i, \underline{A}(u_i), 1 - \overline{A}(u_i))|u_i \in U\}$, *es una biyección*



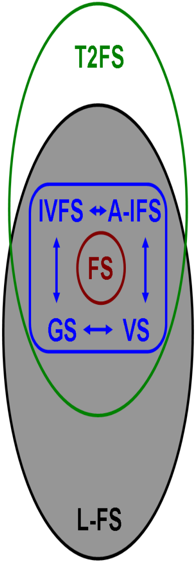
1.- Muchos trabajos son adaptaciones literales de desarrollos realizados para conjuntos difusos

2.- En muchas aplicaciones se parte de pares intuicionistas de Atanassov. Imposible comparar bondad frente a los difusos

- Xu ZS, Hu H, Projection models for intuitionistic fuzzy multiple attribute decision making, International Journal of Information-technology and Decision Making, 9(2), (2010) 267-280
- **Ye J, Fuzzy decision-making method based on the weighted correlation coefficient under intuitionistic fuzzy environment, European Journal of Operational Research, 205(1), (2010) 202-204**

3.- Los resultados de las medidas numéricas de información, etc... deben ser pares intuicionistas de Atanassov.

4.- Eficiencia computacional.



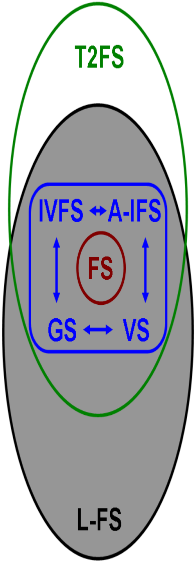
1.- Muchos trabajos son adaptaciones literales de desarrollos realizados para conjuntos difusos

2.- En muchas aplicaciones se parte de pares intuicionistas de Atanassov. Imposible comparar bondad frente a los difusos

- Xu ZS, Hu H, Projection models for intuitionistic fuzzy multiple attribute decision making, International Journal of Information-technology and Decision Making, 9(2), (2010) 267-280
- Ye J, Fuzzy decision-making method based on the weighted correlation coefficient under intuitionistic fuzzy environment, European Journal of Operational Research, 205(1), (2010) 202-204

3.- Los resultados de las medidas numéricas de información, etc... deben ser pares intuicionistas de Atanassov.

4.- Eficiencia computacional.



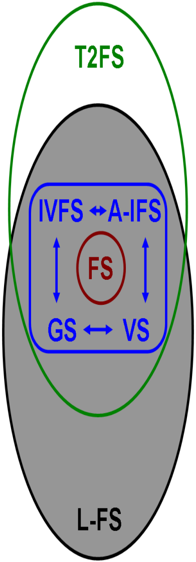
1.- Muchos trabajos son adaptaciones literales de desarrollos realizados para conjuntos difusos

2.- En muchas aplicaciones se parte de pares intuicionistas de Atanassov. Imposible comparar bondad frente a los difusos

- Xu ZS, Hu H, Projection models for intuitionistic fuzzy multiple attribute decision making, International Journal of Information-technology and Decision Making, 9(2), (2010) 267-280
- **Ye J, Fuzzy decision-making method based on the weighted correlation coefficient under intuitionistic fuzzy environment, European Journal of Operational Research, 205(1), (2010) 202-204**

3.- Los resultados de las medidas numéricas de información, etc... deben ser pares intuicionistas de Atanassov.

4.- Eficiencia computacional.



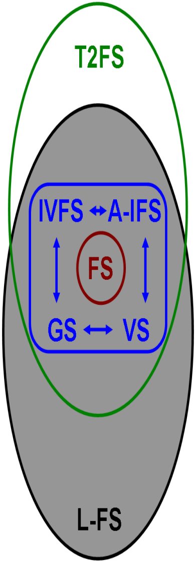
1.- Muchos trabajos son adaptaciones literales de desarrollos realizados para conjuntos difusos

2.- En muchas aplicaciones se parte de pares intuicionistas de Atanassov. Imposible comparar bondad frente a los difusos

- Xu ZS, Hu H, Projection models for intuitionistic fuzzy multiple attribute decision making, International Journal of Information-technology and Decision Making, 9(2), (2010) 267-280
- **Ye J, Fuzzy decision-making method based on the weighted correlation coefficient under intuitionistic fuzzy environment, European Journal of Operational Research, 205(1), (2010) 202-204**

3.- Los resultados de las medidas numéricas de información, etc... deben ser pares intuicionistas de Atanassov.

4.- Eficiencia computacional.



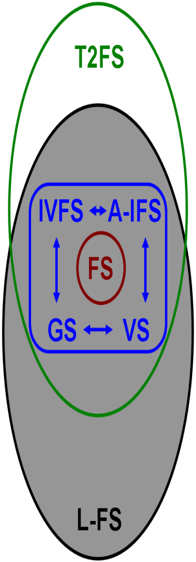
1.- Muchos trabajos son adaptaciones literales de desarrollos realizados para conjuntos difusos

2.- En muchas aplicaciones se parte de pares intuicionistas de Atanassov. Imposible comparar bondad frente a los difusos

- Xu ZS, Hu H, Projection models for intuitionistic fuzzy multiple attribute decision making, International Journal of Information-technology and Decision Making, 9(2), (2010) 267-280
- **Ye J, Fuzzy decision-making method based on the weighted correlation coefficient under intuitionistic fuzzy environment, European Journal of Operational Research, 205(1), (2010) 202-204**

3.- Los resultados de las medidas numéricas de información, etc... deben ser pares intuicionistas de Atanassov.

4.- Eficiencia computacional.



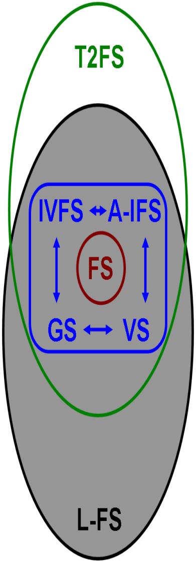
5.- Orden

$(\mu_A, \nu_A) \leq (\mu_B, \nu_B)$ si y solo si $\mu_A \leq \mu_B$ y $\nu_A \geq \nu_B$
Orden parcial. Ha sido extendido de diversas formas a un orden total, como

- Z.Xu and R.Yager, Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets, Int. J. General Syst, 35, (2006) 417-433

$$(\mu_A, \nu_A) \leq (\mu_B, \nu_B) \text{ si y solo si}$$
$$\mu_A - \nu_A \leq \mu_B - \nu_B \text{ ó}$$
$$\mu_A - \nu_A = \mu_B - \nu_B \text{ y } \mu_A + \nu_A \leq \mu_B + \nu_B$$

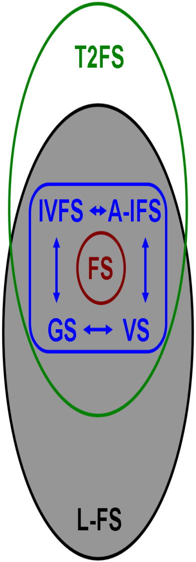
- No se justifica qué sentido tienen estos órdenes totales.
- La extensión de los operadores difusos usuales a los conjuntos intuicionistas no preserva en general la monotonía (respecto al orden total).



6.- Nombre

1. Lógica intuicionista de Brouwer
2. Conjuntos intuicionistas de G. Takeuti y S. Titani
   - G. Takeuti, S. Titani, Intuitionistic fuzzy logic and intuitionistic fuzzy set theory, J. Symbolic Logic 49 (1984) 851-866
3. Otros nombres: Conjuntos bipolares:
   - D. Dubois, S. Gottwald, P. Hajek, J. Kacprzyk, H. Prade Terminological difficulties in fuzzy set theoryThe case of Intuitionistic Fuzzy Sets Fuzzy Sets and Systems, 156(3), (2005) 485-491
   - K. Atanassov, Answer to D. Dubois, S. Gottwald, P. Hajek, J. Kacprzyk and H. Prade's paper Terminological difficulties in fuzzy set theory, the case of Intuitionistic Fuzzy Sets, Fuzzy Sets and Systems, 156(3), (2005) 496-499
   - I. Bloch, Lattices of fuzzy sets and bipolar fuzzy sets, and mathematical morphology Information Sciences, In Press, Corrected Proof, Available online 30 March 2010
   - U. Dudziak, B. Pekala, Equivalent bipolar fuzzy relations Fuzzy Sets and Systems, 161(2), (2010) 234-253

We consider a relation between bipolar fuzzy relations (originally called intuitionistic fuzzy relations)...

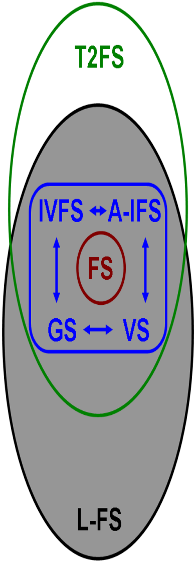


6.- Nombre

1. Lógica intuicionista de Brouwer
2. Conjuntos intuicionistas de G. Takeuti y S. Titani
   - G. Takeuti, S. Titani, Intuitionistic fuzzy logic and intuitionistic fuzzy set theory, J. Symbolic Logic 49 (1984) 851-866
3. Otros nombres: Conjuntos bipolares:
   - D. Dubois, S. Gottwald, P. Hajek, J. Kacprzyk, H. Prade Terminological difficulties in fuzzy set theoryThe case of Intuitionistic Fuzzy Sets Fuzzy Sets and Systems, 156(3), (2005) 485-491
   - K. Atanassov, Answer to D. Dubois, S. Gottwald, P. Hajek, J. Kacprzyk and H. Prade's paper Terminological difficulties in fuzzy set theory, the case of Intuitionistic Fuzzy Sets, Fuzzy Sets and Systems, 156(3), (2005) 496-499
   - I. Bloch, Lattices of fuzzy sets and bipolar fuzzy sets, and mathematical morphology Information Sciences, In Press, Corrected Proof, Available online 30 March 2010
   - U. Dudziak, B. Pekala, Equivalent bipolar fuzzy relations Fuzzy Sets and Systems, 161(2), (2010) 234-253

We consider a relation between bipolar fuzzy relations (originally called intuitionistic fuzzy relations)...

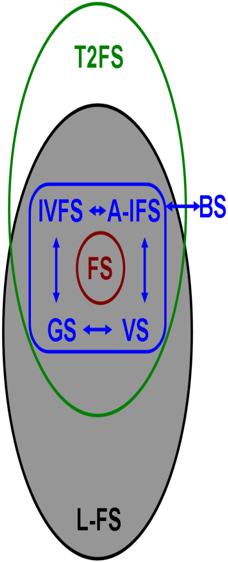
Problemas de los A-IFSs



6.- Nombre

1. Lógica intuicionista de Brouwer
2. Conjuntos intuicionistas de G. Takeuti y S. Titani
   - G. Takeuti, S. Titani, Intuitionistic fuzzy logic and intuitionistic fuzzy set theory, J. Symbolic Logic 49 (1984) 851-866
3. Otros nombres: Conjuntos bipolares:
   - D. Dubois, S. Gottwald, P. Hajek, J. Kacprzyk, H. Prade Terminological difficulties in fuzzy set theoryThe case of Intuitionistic Fuzzy Sets Fuzzy Sets and Systems, 156(3), (2005) 485-491
   - K. Atanassov, Answer to D. Dubois, S. Gottwald, P. Hajek, J. Kacprzyk and H. Prade's paper Terminological difficulties in fuzzy set theory, the case of Intuitionistic Fuzzy Sets, Fuzzy Sets and Systems, 156(3), (2005) 496-499
   - I. Bloch, Lattices of fuzzy sets and bipolar fuzzy sets, and mathematical morphology Information Sciences, In Press, Corrected Proof, Available online 30 March 2010
   - U. Dudziak, B. Pekala, Equivalent bipolar fuzzy relations Fuzzy Sets and Systems, 161(2), (2010) 234-253

We consider a relation between bipolar fuzzy relations (originally called intuitionistic fuzzy relations)...



W. R. Zhang: NPN Fuzzy Sets and NPN Qualitative Algebra: A Computational Framework for Bipolar Cognitive Modeling and Multiagerit Decision Analysis. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-part B: Cybernetics* 26(4) (1996), 561-574.

Definición

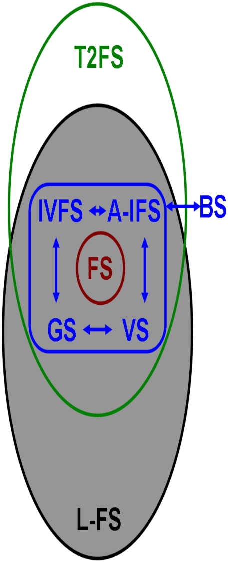
Un conjunto bipolar valorado en U es un objeto de la forma

$$A = \{(u_i, \varphi^+(u_i), \varphi^-(u_i)) | u_i \in U\}$$

con

$$\varphi^+ : U \to [0, 1]$$
$$\varphi^- : U \to [-1, 0]$$

- J.T. Cacioppo, W.L. Gardner, G.G. Bernston: Beyond bipolar conceptualizations and measures: The case of attitudes and evaluative space. *Personality and Social Psychology Review* 1(1) (1997), 3-25
- F. Smarandache: A unifying field in logics: neutrosophic logic, Multiple-Valued Logic 8(3) (2002), 385-438
- D. Dubois, H. Prade: An overview of the asymmetric bipolar representation of positive and negative information in possibility theory, Fuzzy Sets and Systems 160(10) (2009) 1355-1366

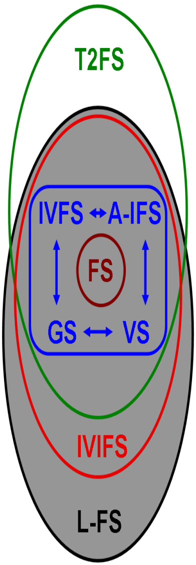


Definición

Un conjunto bipolar simétrico en U es un objeto

$$A = \{(u_i, \mu_A(u_i), \nu_A(u_i)) | u_i \in U\}, \text{ con}$$
$$\mu_A : U \to [0,1]$$
$$\nu_A : U \to [0,1]$$

1. No hay restricciones. Paradoja de D. Dubois
2. Los conjuntos intuicionistas de Atanassov son un caso particular.
3. Citas intuicionistas desde 2006: 479
4. Citas bipolar o bipolaridad desde 2006: 55
5. Fuertemente aplicados en psicología



K.T. Atanassov, G. Gargov: Interval valued intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy sets and Systems 31(3) (1989) 343-349

Definición

Un conjunto intervalo-valorado intuicionista difuso de Atanassov sobre U *es una expresión* A *dada por*

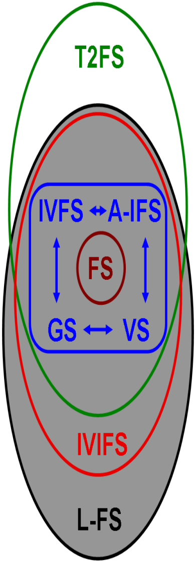
$$A = \{(u_i, M_A(u_i), N_A(u_i))|u_i \in U\}, \text{ donde}$$

$$M_A : U \longrightarrow L([0,1])$$

$$N_A : U \longrightarrow L([0,1])$$

tal que $0 \leq \overline{M_A}(u_i) + \overline{N_A}(u_i) \leq 1$ *para todo* $u_i \in U$

- Los conjuntos intervalo-valorados intuicionistas difusos de Atanassov son un caso particular de los conjuntos L-difusos
- $L([0,1]) = \{\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}] | (\underline{x}, \overline{x}) \in [0,1]^2$ and $\underline{x} \leq \overline{x}\}$

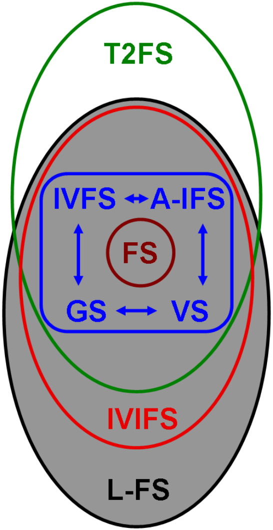


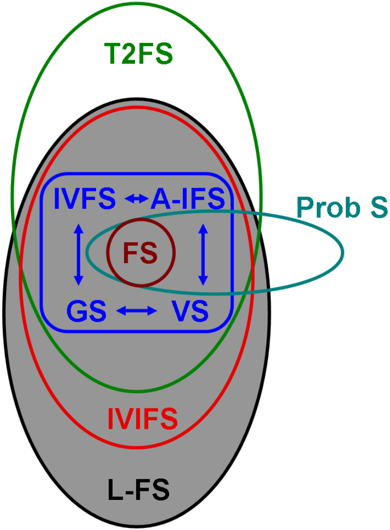
Definición

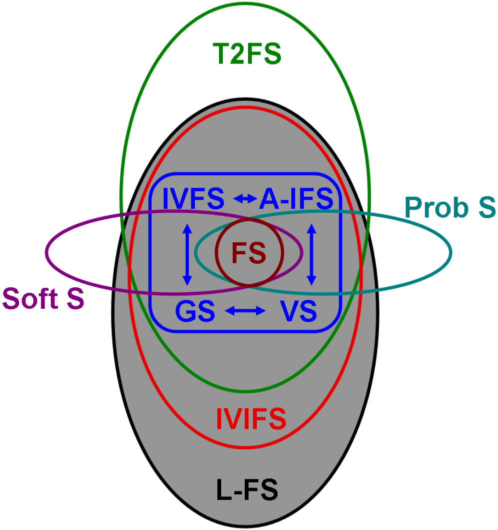
$$A \cup B(u_i) =$$
$$([\text{máx}(\underline{M_A}(u_i), \underline{M_B}(u_i)), \text{máx}(\overline{M_A}(u_i), \overline{M_B}(u_i))]$$
$$[\text{mín}(\underline{N_A}(u_i), \underline{N_B}(u_i)), \text{mín}(\overline{N_A}(u_i), \overline{N_B}(u_i))])$$
$$A \cap B(u_i) =$$
$$([\text{mín}(\underline{M_A}(u_i), \underline{M_B}(u_i)), \text{mín}(\overline{M_A}(u_i), \overline{M_B}(u_i))]$$
$$[\text{máx}(\underline{N_A}(u_i), \underline{N_B}(u_i)), \text{máx}(\overline{N_A}(u_i), \overline{N_B}(u_i))])$$

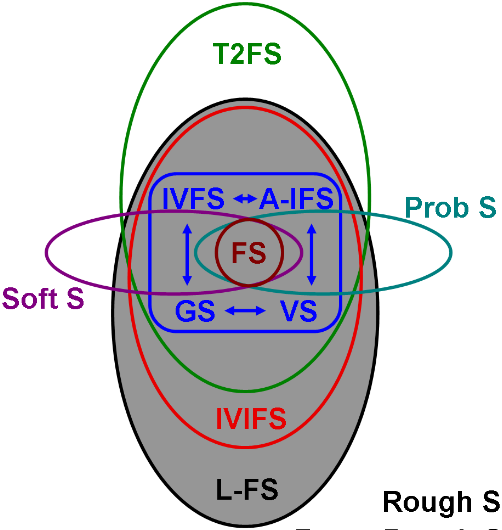
$(IVIAFS(U), \cup, \cap)$ es un retículo completo

Otras extensiones




T2FS
IVFS ↔ A-IFS
FS
GS ↔ VS
Prob S
IVIFS
L-FS


T2FS
IVFS ↔ A-IFS
Prob S
FS
Soft S
GS ↔ VS
IVIFS
L-FS



Rough Sets
Fuzzy Rough Sets

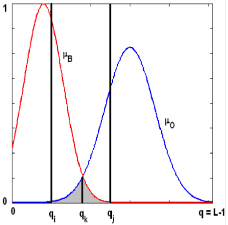
IMAGE PROCESSING

- *Segmentation*
- *Edge detectors*
- *Image magnification*

Application: Image processing

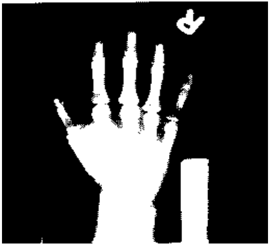
Imperfect information

99	71	71	68	40	38	62	62
100	95	83	65	42	40	60	61
101	105	90	66	59	67	66	67
101	105	95	78	63	75	68	68
102	108	110	100	80	110	100	115
110	109	112	103	113	133	158	150
112	110	115	120	135	155	175	155
115	110	115	130	150	155	179	180



Definition

Process of dividing the image in disjoint regions or classes (objects) in such a way that each region (class) satisfies a predetermined set of properties.



Thresholding techniques: each object is characterized by an interval of gray levels

Images Q in a gray scale $\{0, 1, \cdots, L-1\}$ with a single object

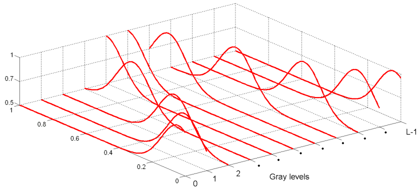
- Select a threshold t that separates two gray scales
- Assign the value 1 to the pixels whose intensity is greater (smaller) than t and 0 to the pixels whose intensity is smaller (greater) than t

$$Q(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ if } t \leq Q(x,y) \leq 255 \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

Application: Image processing. Thresholding. Huang-Wang (1995)

1. Assign L fuzzy sets Q_t to each image Q. ($t = 0, \cdots, L-1$)

$$Q_t = \{(q, Q_t(q)) | q \in \{0, \cdots, L-1\}\}, \text{ such that} \quad (2)$$
$$0{,}5 \leq Q_t(q) \leq 1$$



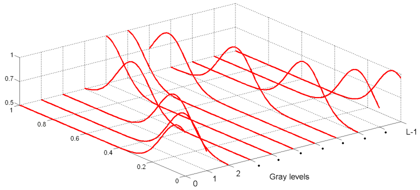
2. Calculate the fuzzy entropy of each one of the sets Q_t
3. Take as the best threshold the value of t associated with the set of less entropy

Huang L.K., Wang M.J., Image thresholding by minimizing the measure of fuzziness, Pattern Recognition, 28(1), 41–51 (1995)

Application: Image processing. Thresholding. Huang-Wang (1995)

1. Assign L fuzzy sets Q_t to each image Q. ($t = 0, \cdots, L-1$)

$$Q_t = \{(q, Q_t(q)) | q \in \{0, \cdots, L-1\}\}, \text{ such that } \\ 0{,}5 \leq Q_t(q) \leq 1 \tag{2}$$



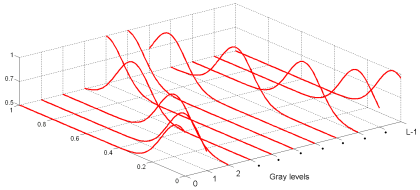
2. Calculate the fuzzy entropy of each one of the sets Q_t
3. Take as the best threshold the value of t associated with the set of less entropy

Huang L.K., Wang M.J., Image thresholding by minimizing the measure of fuzziness, Pattern Recognition, 28(1), 41–51 (1995)

Application: Image processing. Thresholding. Huang-Wang (1995)

1. Assign L fuzzy sets Q_t to each image Q. ($t = 0, \cdots, L-1$)

$$Q_t = \{(q, Q_t(q)) | q \in \{0, \cdots, L-1\}\}, \text{ such that} \quad 0{,}5 \leq Q_t(q) \leq 1 \tag{2}$$



2. Calculate the fuzzy entropy of each one of the sets Q_t
3. Take as the best threshold the value of t associated with the set of less entropy

- Huang L.K., Wang M.J., Image thresholding by minimizing the measure of fuzziness, Pattern Recognition, 28(1), 41–51 (1995)

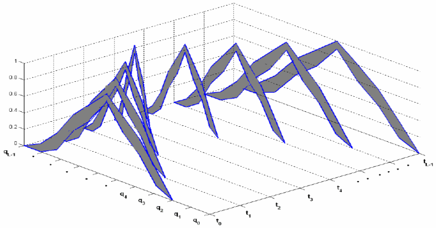
Thresholding. Huang-Wang Algorithm

- We recover classical methods.
- Problem: Which are the best fuzzy sets Q_t that we should take for each image?

Application: Image processing. Segmentation. Interval-valued Algorithm

1. Assign L Interval-valued fuzzy sets Q_t to each image Q. ($t = 0, \cdots, L-1$)

$$Q_t = \{(q, Q_t(q) = [\underline{Q}_t(q), \overline{Q}_t(q)]) | q \in \{0, \cdots, L-1\}\} \tag{3}$$

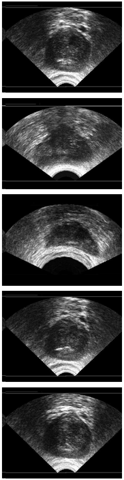


2. Calculate the Interval-valued fuzzy entropy $\mathcal{E}_F$ of each one of the sets Q_t

$$\mathcal{E}_F(Q_t) = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \overline{Q}_t(q_i) - \underline{Q}_t(q_i)$$

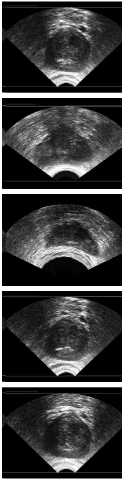
3. Take as the best threshold the value of t associated with the set of smallest interval-valued entropy

Application: Image processing.Interval-valued Algorithm. Ignorance functions

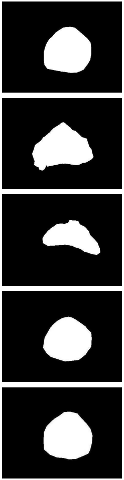


Original

Application: Image processing.Interval-valued Algorithm. Ignorance functions

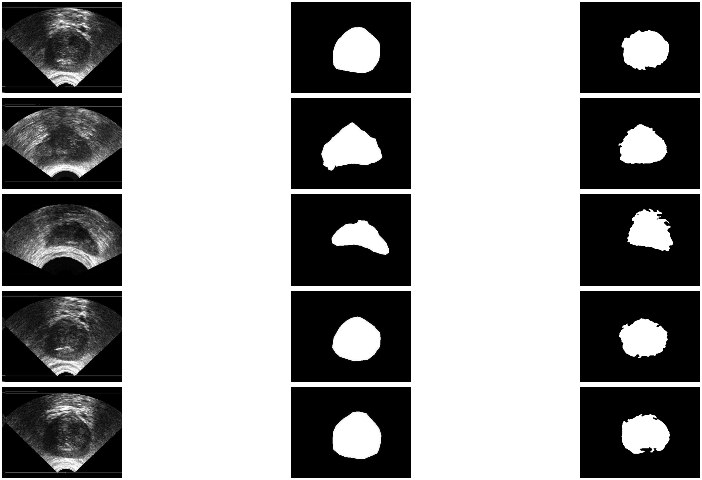


Original

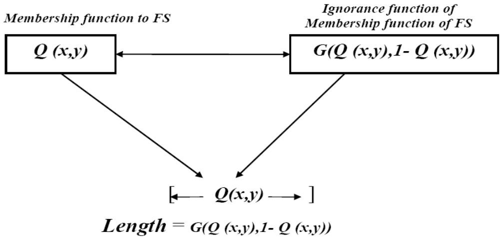


Ideal

Application: Image processing.Interval-valued Algorithm. Ignorance functions



Original Ideal Ignorance



Definición

An ignorance function is a continuous function $G_i : [0,1]^2 \to [0,1]$ *such that:*

$G_i1)$ $G_i(x,y) = G_i(y,x)$ *for every* $x, y \in [0,1]$;

$G_i2)$ $G_i(x,y) = 0$ *if and only if* $x = 1$ *or* $y = 1$;

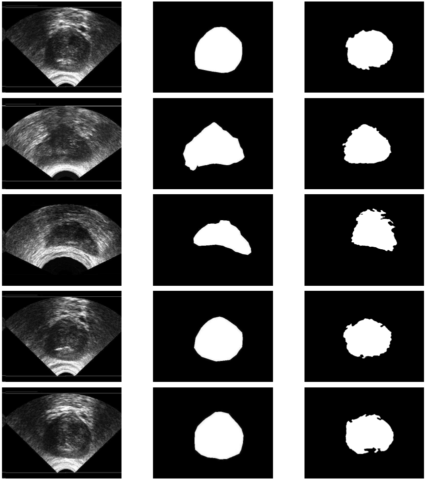
$G_i3)$ *If* $x = 0{,}5$ *and* $y = 0{,}5$, *then* $G_i(x,y) = 1$;

$G_i4)$ G_i *is decreasing in* $[0{,}5, 1]^2$;

$G_i5)$ G_i *is increasing in* $[0, 0{,}5]^2$.

- H. Bustince, M. Pagola, E. Barrenechea, J. Fernandez, P. Melo-Pinto, P. Couto, H.R. Tizhoosh, J. Montero, Ignorance functions. An application to the calculation of the threshold in prostate ultrasound images, Fuzzy Sets and Systems, 161(1) 2010, 20-36

Application: Image processing.Interval-valued Algorithm. Ignorance functions

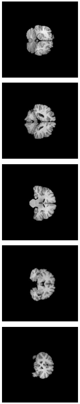


Original | Ideal | Ignorance

Huang-Wang	I-Minimum	I-Product	I-Geometric mean
36.3	38.3	26.5	13.9
70.1	89.0	71.4	84.4
75.6	89.5	52.1	62.2
29.3	42.8	23.3	22.8
74.2	89.5	51.3	61.0
41.2	60.7	32.2	44.7
42.9	43.3	27.6	43.3
52.6	84.9	41.8	46.3
33.1	43.4	30.0	12.4
37.4	43.3	30.7	12.0
49.3	62.5	38.7	40.3

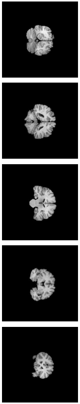
- H. Bustince, M. Pagola, E. Barrenechea, J. Fernandez, P. Melo-Pinto, P. Couto, H.R. Tizhoosh, J. Montero, Ignorance functions. An application to the calculation of the threshold in prostate ultrasound images, Fuzzy Sets and Systems, 161(1) 2010, 20-36

Application: Image processing. Interval-valued Algorithm. Several fuzzy sets

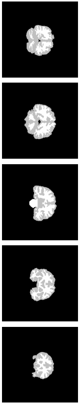


Original

Application: Image processing. Interval-valued Algorithm. Several fuzzy sets

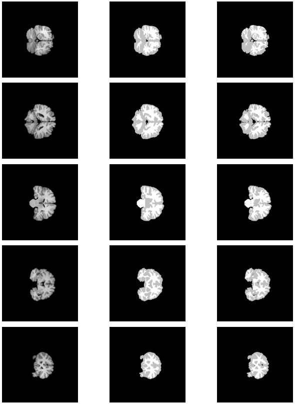


Original

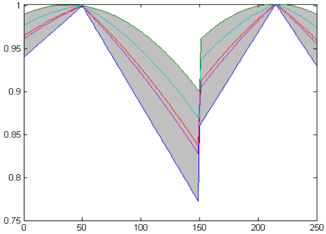


Ideal

Application: Image processing. Interval-valued Algorithm. Several fuzzy sets

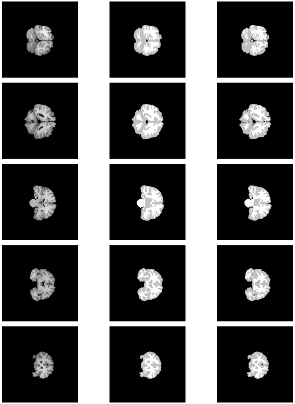


Original Ideal Several FS



- Advantage: K_α recovering of fuzzy

Application: Image processing. Interval-valued Algorithm. Several fuzzy sets



Original Ideal Several FS

REF	Huang	$\mathcal{E}_B$	$\mathcal{E}_K$	$\mathcal{E}_V$	Otsu	Tizhoosh
0.8795	0.8825	0.8879	0.8675	0.837	0.8084	0.6949
0.7084	0.7182	0.7351	0.7084	0.6932	0.6629	0.6376
0.6324	0.6394	0.6498	0.6275	0.6187	0.5993	0.5447
0.7202	0.7306	0.7526	0.708	0.6877	0.6498	0.6307
0.7455	0.7512	0.7742	0.7322	0.6994	0.6615	0.6312
0.8726	0.8878	0.9052	0.8632	0.8126	0.758	0.7273
0.8886	0.8908	0.8852	0.8886	0.8768	0.8442	0.674
0.6954	0.6954	0.6954	0.6954	0.7092	0.7248	0.5792
0.6228	0.6314	0.6391	0.6075	0.5927	0.5591	0.5347
0.8167	0.8262	0.8395	0.8045	0.7833	0.7404	0.6936
0.7582	0.7654	**0.7764**	0.7503	0.7311	0.7008	0.6348

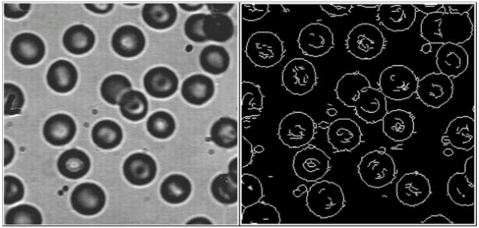
- M. Pagola, J. Fernandez, E. Barrenechea, H. Bustince, Interval type-2 fuzzy sets constructed from several membership functions. Application to the fuzzy thresholding algorithm, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 21 (2), 230-244 (2013)

What is an edge?

Definition

Big enough jump between the intensity of a pixel and that of its neighbours

Edges: Black and white image (crisp set)



Specific detectors for each type of image

Application: Image processing. Edges and False Edges

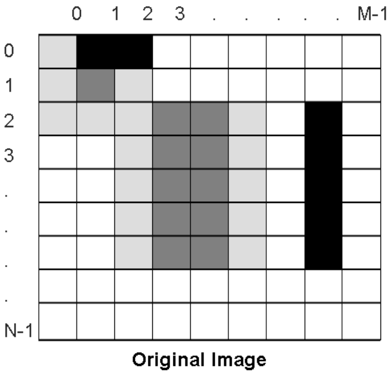
Canny detector:

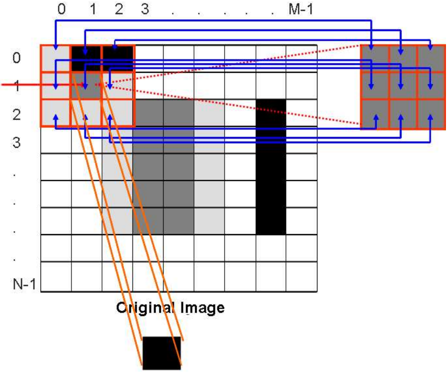
- Localization
- Unique answer

- J. Canny, A computational approach to edge detection, IEEE Trans. Pattern Anal Mach. Intell. 8 679-698 (1986)

False edge: image in a gray scale (not crisp)

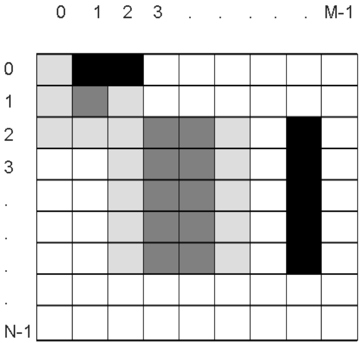
Application: Image processing. False Edges



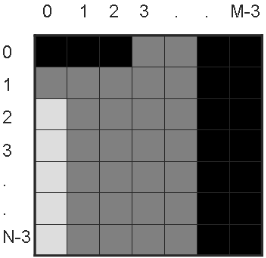


$L^{n,m}_{T_1,T_2} : \mathcal{F}(X \times Y) \to \mathcal{F}(X \times Y)$ given by

$$L^{n,m}_{T_1,T_2}[Q](x,y) = \mathop{T_1}\limits_{\substack{i=-n\\ j=-m}}^{\substack{m\\ n}} \Big(T_2(Q(x-i,y-j), Q(x,y)) \Big)$$

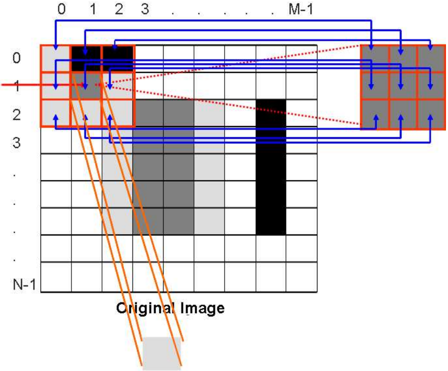


Original Image



Lower constructor

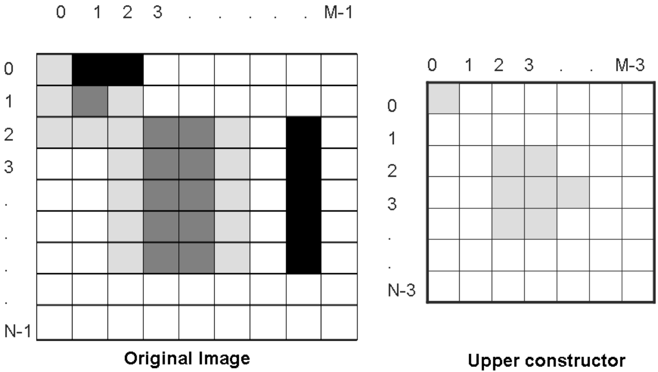
Edges



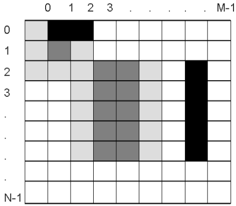
$U^{n,m}_{S_1,S_2} : \mathcal{F}(X \times Y) \to \mathcal{F}(X \times Y)$ given by

$$U^{n,m}_{S_1,S_2}[Q](x,y) = \underset{\substack{i=-n \\ j=-m}}{\overset{\substack{m \\ n}}{S_1}} \Big(S_2(Q(x-i, y-j), Q(x,y)) \Big)$$

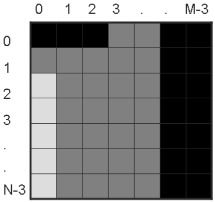
Application: Image processing. False Edges



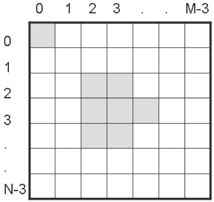
Edges



Original Image

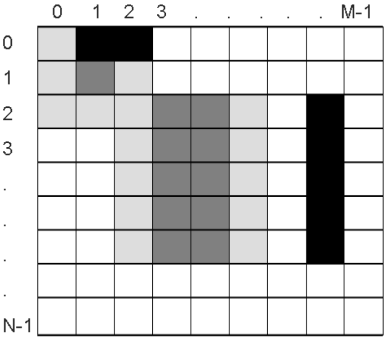


Lower constructor

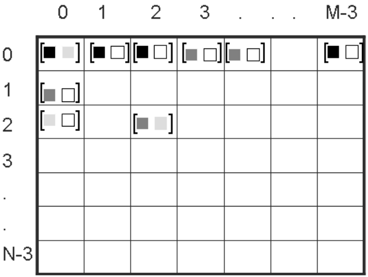


Upper constructor

Edges



Original Image

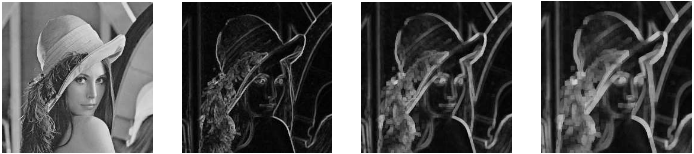


Interval Type 2 Fuzzy Image

Application: Image processing. False Edges

False edge detector:

$$W^{n,m}(Q(x,y)) = U^{n,m}_{S_1,S_2}[Q](x,y) - L^{n,m}_{T_1,T_2}[Q](x,y)$$



The number of light pixels to represent the false edge depends on the considered t-norm and t-conorm.

1.- Minimun, Maximun

2.- Product and probabilistic sum

3.- etc...

- E. Barrenechea, H. Bustince, B. De Baets, C. Lopez-Molina, Construction of Interval-valued Fuzzy Relations With Application to the Generation of Fuzzy Edge Images, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 19 (5), 819-830 (2011)

Edge detector:

$$W^{n,m}(Q(x,y)) = U^{n,m}_{S_1,S_2}[Q](x,y) - L^{n,m}_{T_1,T_2}[Q](x,y) \geq \alpha \in [0,1]$$

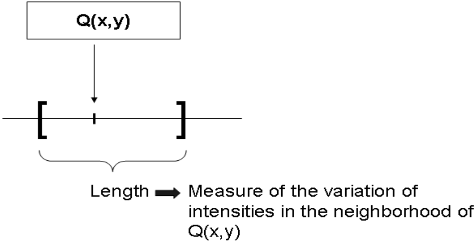
Genetic algorithms, Neural Network, etc...

- H. Bustince, E. Barrenechea, M. Pagola, J. Fernandez, Interval-valued fuzzy sets constructed from matrices: Application to edge detection, Fuzzy Sets and Systems, 160(13) 1819-1840, (2009)

Application: Image processing. Image magnification

- Jurio, A.; Pagola, M.; Mesiar, R.; Beliakov, G.; Bustince, H., Image Magnification Using Interval Information , IEEE Transactions on Image Processing, 20 (11), 3112-3123 (2011)

Image Q



Construction method

$$F : [0,1]^2 \to L([0,1]) \text{ given by}$$
$$F(Q(x,y), Ign(Q(x,y))) =$$
$$\Big[Q(x,y)(1 - Ign(Q(x,y))), Q(x,y)(1 - Ign(Q(x,y))) + Ign(Q(x,y))\Big] \tag{4}$$

Length of associated interval $Q(x,y) = Ign(Q(x,y))$

Application: Image processing. Image magnification

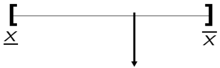
Definition

Let $\alpha \in [0,1]$. The operator

$$K_\alpha : L([0,1]) \to [0,1] \text{ given by}$$
$$K_\alpha([\underline{x}, \overline{x}]) = \underline{x} + \alpha(\overline{x} - \underline{x}) \tag{5}$$

satisfies the following properties:

1. $K_0([\underline{x}, \overline{x}]) = \underline{x}$
2. $K_1([\underline{x}, \overline{x}]) = \overline{x}$
3. $K_\alpha([\underline{x}, \overline{x}]) \in [\underline{x}, \overline{x}]$

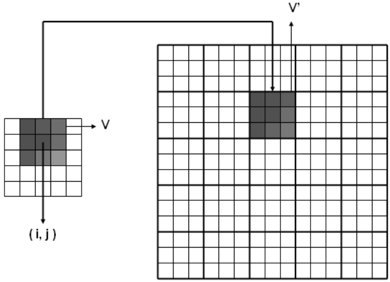


$$K_\alpha([\underline{x}, \overline{x}]) = \underline{x} + \alpha(\overline{x} - \underline{x})$$

- H. Bustince, T. Calvo, B. De Baets, J. Fodor, R. Mesiar, J. Montero, D. Paternain, A. Pradera, A class of aggregation functions encompassing two-dimensional OWA operators, Information Sciences, 180(10) 1977-1989 (2010)

Theorem

$$K_{Q(i,j)}\left[Q(i,j)(1-Ign(Q(i,j))), Q(i,j)(1-Ign(Q(i,j)))+Ign(Q(i,j))\right] = Q(i,j)$$



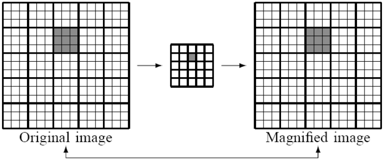
Length of associated interval $Q(i,j) = Ign(Q(x,y)) = \text{máx}(V) - \text{mín}(V)$

$$K_{Q(i-1,j-1)}\left[Q(i,j)(1-Ign(Q(i,j))), Q(i,j)(1-Ign(Q(i,j)))+Ign(Q(i,j))\right] = \beta$$

Space color (R, G, B)

Characteristics:

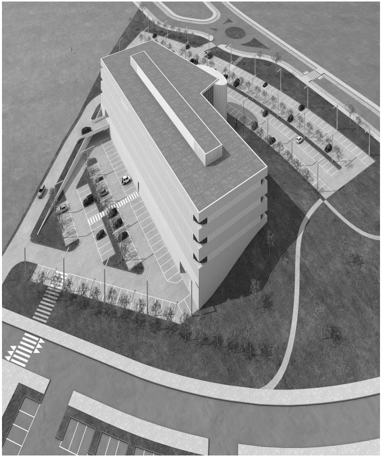
- Simple method
- Very fast method in time
- Effective method



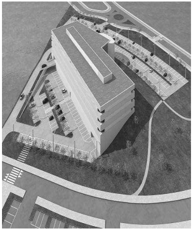
$$SM(A,B) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 - |A(u_i) - B(u_i)|$$

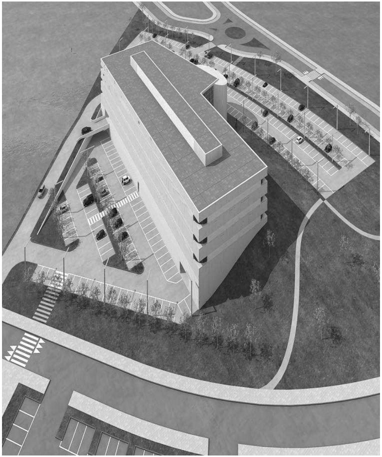
- Jurio, A.; Pagola, M.; Mesiar, R.; Beliakov, G.; Bustince, H., Image Magnification Using Interval Information , IEEE Transactions on Image Processing, 20 (11), 3112-3123 (2011)

Application: Image processing. Image magnification. Architectural Firm

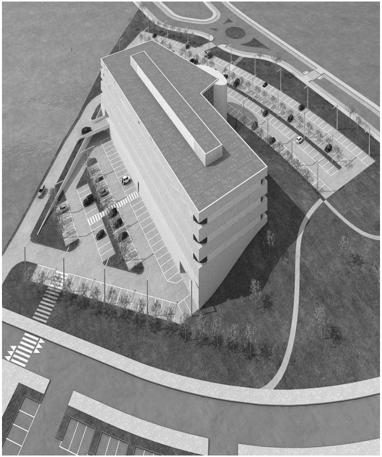


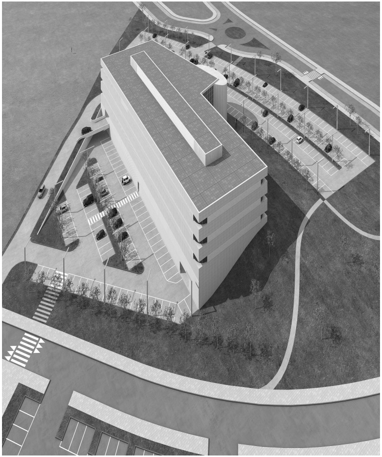
Application: Image processing. Image magnification. Architectural Firm





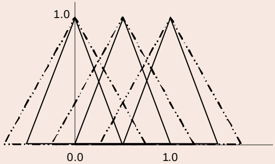
Application: Image processing. Image magnification. Architectural Firm





$$SM(A, B) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 - |A(u_i) - B(u_i)|$$

- *CLASSIFICATION SYSTEMS BASED ON FUZZY RULES WITH IVFSs.*
  - *We generate the knowledge base (KB) by already known rule generating algorithms.*
  - *From this KB we include the IVFSs.*
  - *We modify the fuzzy reasoning method.*
  - *We carry on a genetic post-processing: length of the support of the upper bound.*
  - *We statistically improve the base models.*

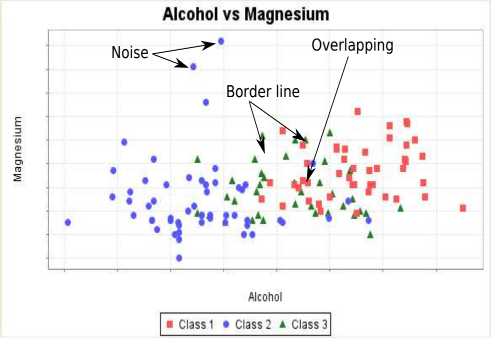


- Classification problem:

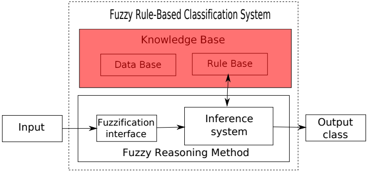
  P examples: $X = \{x_1, ..., x_p\}$
  n attributes: $\mathcal{A} = \{a_1, ..., a_n\}$
  M classes: $C = \{c_1, ..., c_M\}$

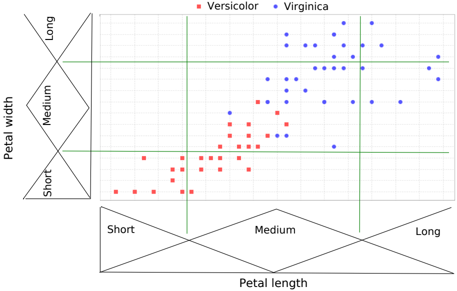
Classifier:

$$D : \mathcal{A}^n \rightarrow C$$



Applications: Classification. Statement of the problem



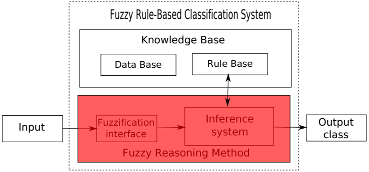


R_1: If *Width* is $Short$ then *Class* $=$ *Versicolor*
R_2: If *Length* is $Long$ then *Class* $=$ *Virginica*
R_3: If *Width* is $Long$ then *Class* $=$ *Virginica*
R_4: If *Length* is $Medium$ and *Width* is $Medium$ then *Class* $=$ *Virginica*

Applications: Classification. Statement of the problem

R_j : If x_{p1} is A_{j1} and ... and x_{pn} is A_{jn} Then *Class* $= C_j$ with RW_j

- Fuzzy Reasoning Method:
  1. *Matching degree:*
     $\mu_{A_j}(x_p) = T(\mu_{A_{j1}}(x_{p1}), \ldots, \mu_{A_{jn}}(x_{pn}))$
  2. *Association degree:*
     $$\mathrm{b}_j^k = h(\mu_{A_j}(x_p), RW_j^k)$$
  3. *Association degree by classes:*
     $$Y_k = f(b_j^k,\ b_j^k > 0)$$
  4. *Classification:*
     $$C_{best} = \arg \max_{k=1,\cdots,M} (Y_k)$$

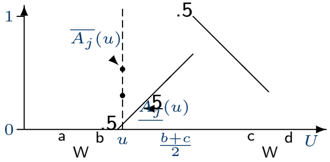


- k = 1, ..., M (n classes).
- j = 1,..., L (n rules).

- O. Cordón, M. J. del Jesús, F. Herrera: A proposal on reasoning methods in fuzzy rule-based classification systems. Int. J. Approx. Reason., 20:1 (1999) 21-45.
- J. Huehn, E. Hüellermeier. FURIA: an algorithm for unordered fuzzy rule induction. Data Minig and Knowledge Discovery, 19(2), 293-391 (2009).
- H. Ishibuchi, T. Nakashima, M. Nii: Classification and Modelling with Linguistic Information Granules. Advanced Approaches to Linguistic Data Mining. Springer, (2005)

Applications: Classification. IV construction

- Lower bound: initial fuzzy set.
- Upper bound construction:
  - Centered in the lower bound.
  - Symmetrical in both sides.
  - Amplitude of the support: $50\,\%$ greater than that of the lower bound.



W: parameter that determines the amplitude.
Initial construction $W = 0{,}5$

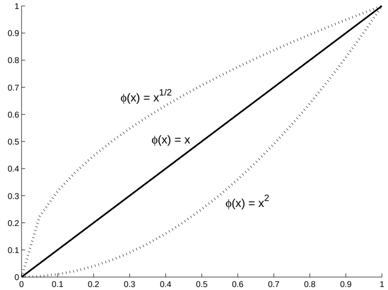
1. *Interval matching degree*:

$$[\underline{A_j}(x_p), \overline{A_j}(x_p)] = \mathbf{T}_{T_1,T_2}(IV\text{-}REF([\underline{A_{j1}}(x_{p1}), \overline{A_{j1}}(x_{p1})], [1,1]), \ldots, \\ IV\text{-}REF([\underline{A_{jn}}(x_{pn}), \overline{A_{jn}}(x_{pn})], [1,1])), \qquad j = 1, \ldots, L$$

where $IV\text{-}REF(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [T(REF(\underline{x}, \underline{y}), REF(\overline{x}, \overline{y})), S((REF(\underline{x}, \underline{y}), REF(\overline{x}, \overline{y})))]$

with $REF(x, y) = \phi_1^{-1}(1 - |\phi_2(x) - \phi_2(y)|)$ and $\phi_1(x) = x^a$, $\phi_2(x) = x^b$

The IV-REF of each attribute is defined by the values of a and b.



2. *Interval association degree*:

$$[\underline{b_j^k}, \overline{b_j^k}] = h([\underline{A_j}(x_p), \overline{A_j}(x_p)], [\underline{RW_j^k}, \overline{RW_j^k}]) \qquad k = 1, \ldots, M, \quad j = 1, \ldots, L.$$

$$[\underline{RW_j}, \overline{RW_j}] = \frac{\sum_{x_p \in Class C_j} A_j(x_p)}{\sum_{p=1}^{m} A_j(x_p)}$$

where

$$A_j(x_p) = [\underline{A_j}(x_p), \overline{A_j}(x_p)]$$

3. *Interval association degree by classes*.

$$[\underline{Y_k}, \overline{Y_k}] = f([\underline{b_j^k}, \overline{b_j^k}],\ j = 1, \ldots, L \text{ y } [\underline{b_j^k}, \overline{b_j^k}] > 0_L), \qquad k = 1, \ldots, M.$$

4. *Classification*. CHOOSE A LINEAR ORDER BETWEEN INTERVALS

$$C_{best} = \text{arg} \max_{k=1,\ldots,M}([\underline{Y_k}, \overline{Y_k}])$$

- Sanz, J.A. ; Fernandez, A. ; Bustince, H. ; Herrera, F.: IVTURS: A Linguistic Fuzzy Rule-Based Classification System Based On a New Interval-Valued Fuzzy Reasoning Method With Tuning and Rule Selection. IEEE Transactions on Fuzzy Systems., 21 (3), 399 - 411 (2013).

Applications: Classification. Remarks

The result of the previous interval algorithm depends on:

1. The construction method for the intervals
2. The linear order between the intervals.

If any of the previous items is not determined for a given problem, we propose the following solution:

1. We run the algorithm with different construction methods and/or linear orders.
2. We consider each obtained solution as the answer given by an expert.
3. We apply a decision making method to select the best solution (ensembles).

Conclusions: When should we use extensions?

Rule 1:

If for a given problem the considered objects are associated to imperfect information, we may use fuzzy theory.

Rule 2:

If the results obtained with the fuzzy theory are not good and we think this is due to the fact that the experts have problems to build the membership degrees of the elements to the fuzzy set, then we may use extensions of the fuzzy sets.

The choice of the extension depends on the nature of the problem

- Interval-valued fuzzy sets
- Atanassov's intuitionistic fuzzy sets

Rule 3:

If results are not good enough, we should fuse different methods.

Conclusions: When should we use extensions?

Rule 1:

If for a given problem the considered objects are associated to imperfect information, we may use fuzzy theory.

Rule 2:

If the results obtained with the fuzzy theory are not good and we think this is due to the fact that the experts have problems to build the membership degrees of the elements to the fuzzy set, then we may use extensions of the fuzzy sets.

The choice of the extension depends on the nature of the problem

- Interval-valued fuzzy sets
- Atanassov's intuitionistic fuzzy sets

Rule 3:

If results are not good enough, we should fuse different methods.

Conclusions: When should we use extensions?

Rule 1:

If for a given problem the considered objects are associated to imperfect information, we may use fuzzy theory.

Rule 2:

If the results obtained with the fuzzy theory are not good and we think this is due to the fact that the experts have problems to build the membership degrees of the elements to the fuzzy set, then we may use extensions of the fuzzy sets.

The choice of the extension depends on the nature of the problem

- Interval-valued fuzzy sets
- Atanassov's intuitionistic fuzzy sets

Rule 3:

If results are not good enough, we should fuse different methods.

Conclusions: When should we use extensions?

Rule 1:

If for a given problem the considered objects are associated to imperfect information, we may use fuzzy theory.

Rule 2:

If the results obtained with the fuzzy theory are not good and we think this is due to the fact that the experts have problems to build the membership degrees of the elements to the fuzzy set, then we may use extensions of the fuzzy sets.

The choice of the extension depends on the nature of the problem

- Interval-valued fuzzy sets
- Atanassov's intuitionistic fuzzy sets

Rule 3:

If results are not good enough, we should fuse different methods.

Conclusions

1. In images with a lot of imperfect information, the results obtained with extensions are usually good.
2. The choice of the extension depends on the application.
3. If we use one extension, we must also use the specific features of that extension.
4. The use of extensions for a given application is only justified if it improves the results obtained with fuzzy sets.

The End

Thanks for your attention